Эту идею подарил мне Силаев на лекции в 7-м семестре.

Все мы знаем, что интегрирование и дифференцирование – обратные другу другу операции:

Правда, есть проблема с неоднозначностью. Давайте её пофиксим:

Оператор дифференцирования $\widehat{D}$ ставит в соответствии любой $u(x)$ её производную $v(x) = \frac{du}{dx}$.
А оператор интегрирования $\hat{I}$ ставит в соответствие любой $v(x)$ первообразную $u(x)$, чтобы вдобавок $u(x_0) = u_0$. Можно сказать, что он решает систему:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = v(x) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

Вот теперь оба оператора взаимно однозначны.

Это всё в одномерии. А что если в систему мы запихнём оператор Лапласа?

$$\begin{cases} \Delta u(\vec{r}) = v(\vec{r}) \\ \text{граничные условия на } u \end{cases}$$

Да и не обязательно в многомерии, мы и в одномерии можем поставить какой-нибудь стрёмный оператор Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{du(x)}{dx}\rho(x)\right) = v(x) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

В общем, ставим мы какой-нибудь стрёмный дифференциальный оператор $\widehat{K}$:

$$\begin{cases} \widehat{K}u(\vec{r}) = v(\vec{r}) \\ \text{граничные условия на } u \end{cases}$$

Который из $u(\vec{r})$ делает $v(\vec{r})$. Так вот, обратный оператор $\widehat{G}$ - к оператору $\widehat{K}$ и есть оператор Грина.

А при чём тут функция Грина? Да просто этот оператор $\hat{G}$ зачастую представляется в виде вот такого интеграла:

$$\hat{G}[v(\vec{r})] = \iiint G(\vec{r},\vec{r}_0)\, v(\vec{r_0}) dV(\vec{r}_0)$$

где как раз и участвует функция Грина.

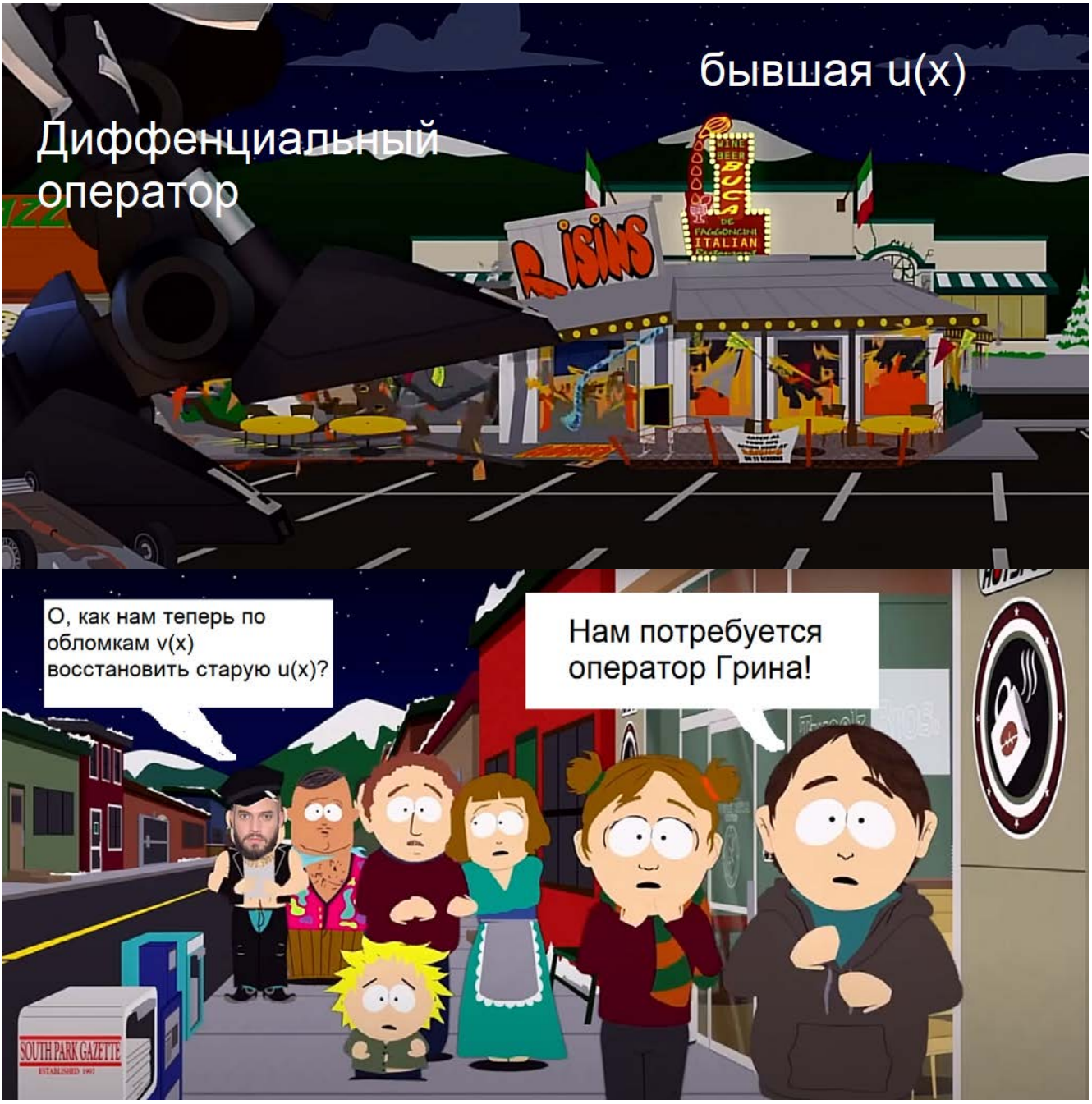
Примеры: оператору Лапласа соответствует функция Грина $\frac{1}{r}$ (с точностью до коэфа 4π). Это равносильно тому, что обратный к оператору Лапласа (и граничными условиями вместе) – оператор Грина вида

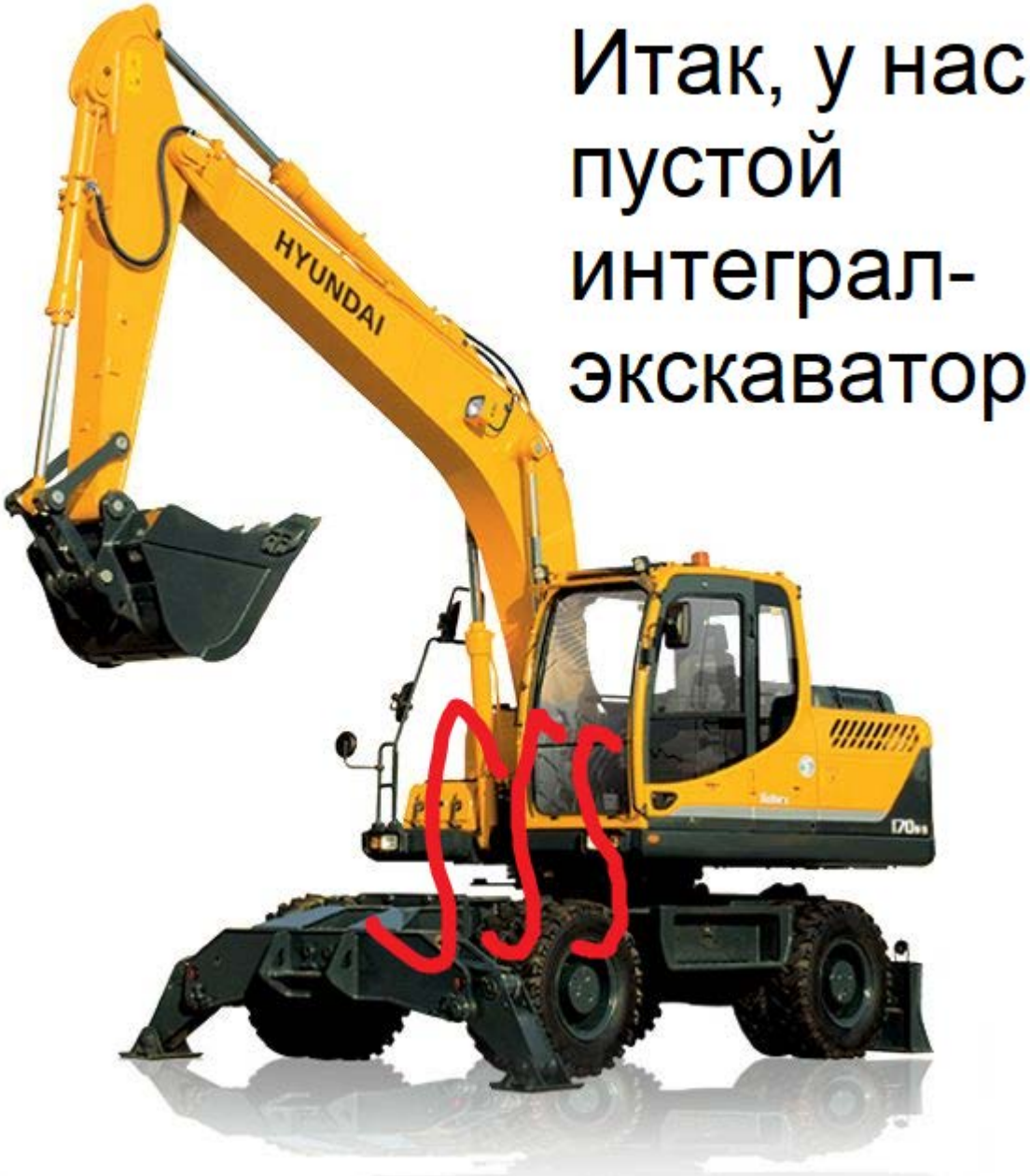
$$\hat{G}[v(\vec{r})] = \iiint \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} v(\vec{r_0}) dV(\vec{r}_0)$$

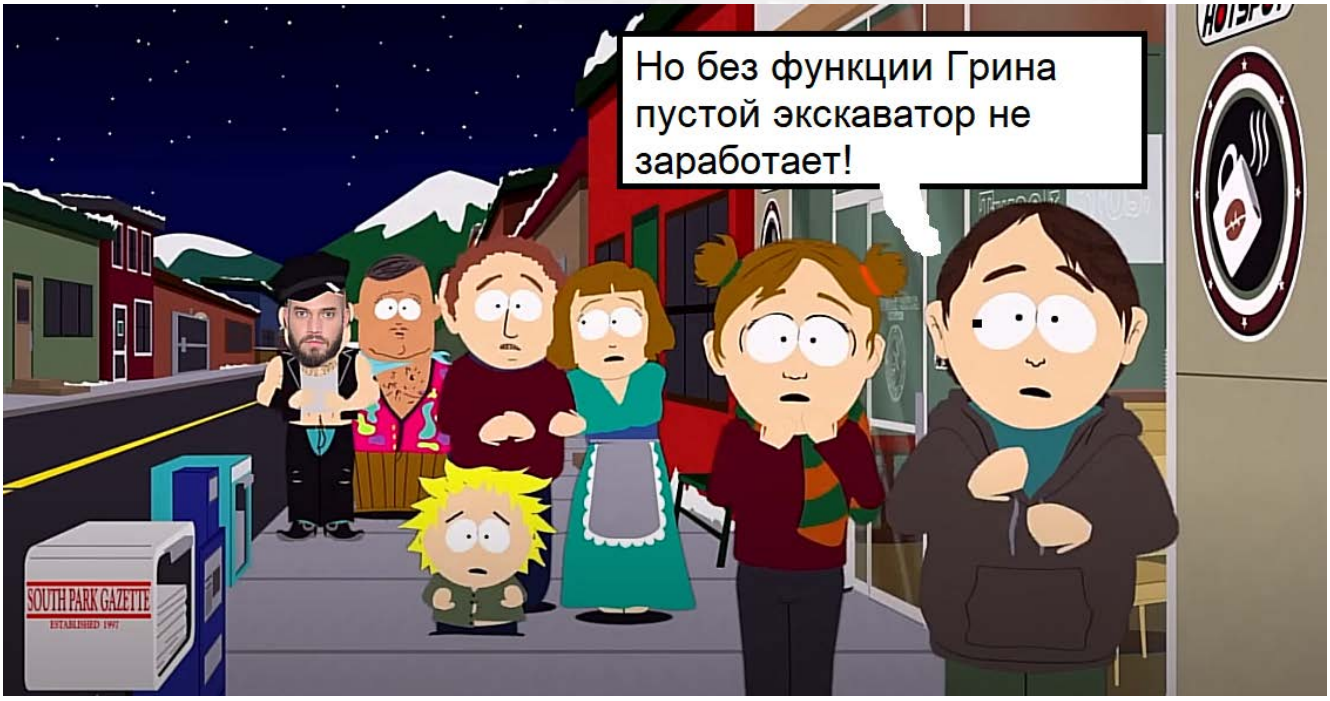
А обратный к оператору Гельмгольца вот такой оператор Грина:

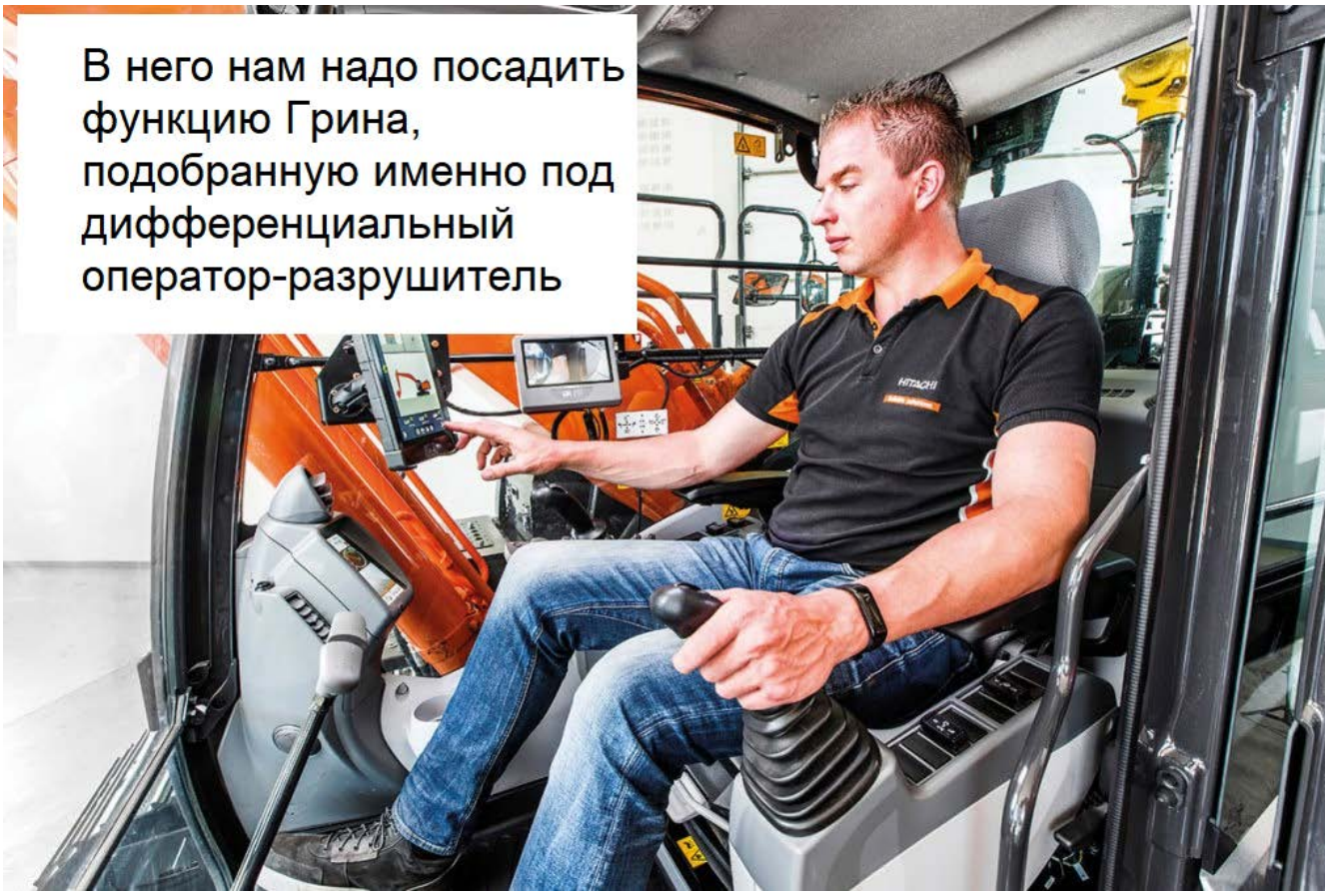
$$\hat{G}[v(\vec{r})] = \iiint \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} v(\vec{r_0}) dV(\vec{r}_0)$$

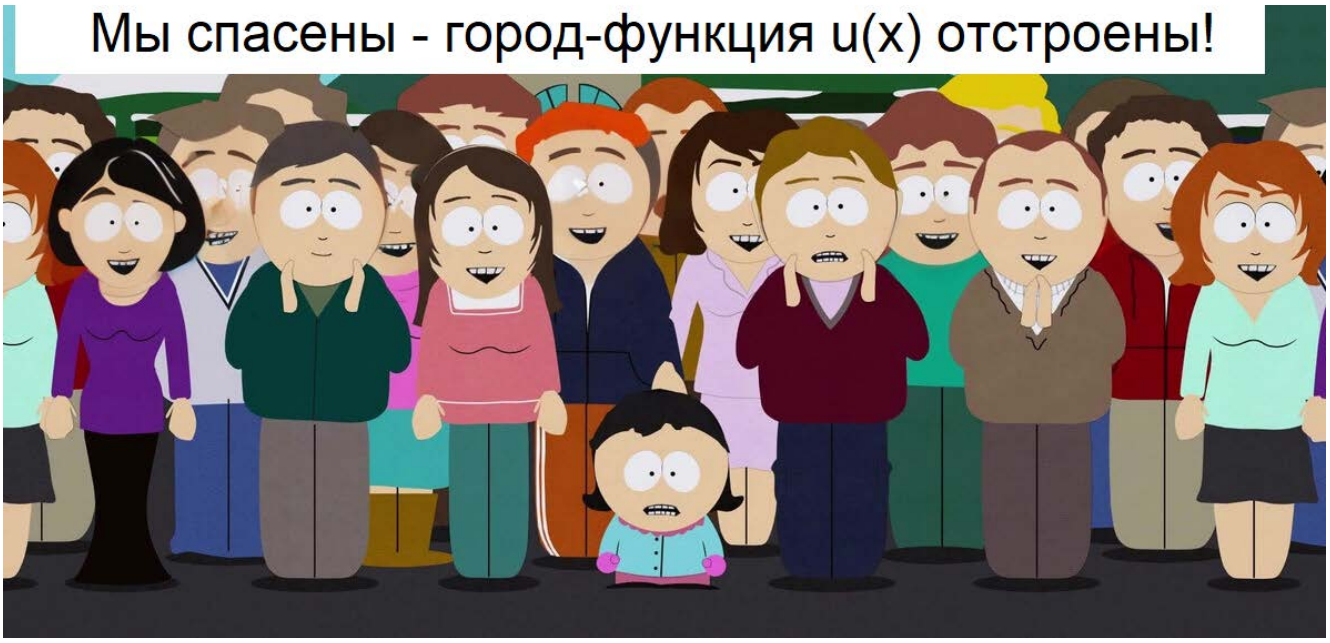
Запомним всё это в виде комикса:




Итак, у нас пустой интеграл-экскаватор
HYUNDAI


Но без функции Грина пустой экскаватор не заработает!
SOUTH PARK GAZETTE


В него нам надо посадить функцию Грина, подобранную именно под дифференциальный оператор-разрушитель
HITACHI


Мы спасены - город-функция u(x) отстроены!